

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1 (Βέλτιστη Ομοιόμορφη Προσέγγιση)

Να βρείτε τη β.ο.π. που προσεγγίζει την f , ορισμένη στο $X_S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ στον P_1 , όπου:

x_i	-2	-1	0	1	2
f_i	-2	-2	1	2	1

με τον αλγόριθμο εναλλαγής σημείων ξεκινώντας από $X_0 = \{-2, -1, 0\}$

ΛΥΣΗ

$$P_1^*(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \rightarrow P_\sigma(x) = \frac{1}{4} + \frac{3}{2}x$$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

$$e(x) = f(x) - P_\sigma(x)$$

- $e(-2) = -2 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2}(-2)\right) = \frac{3}{4} \rightarrow \text{εξωτερικό}$
- $e(-1) = -2 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2}(-1)\right) = -\frac{3}{4}$
- $e(0) = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \cdot 0\right) = \frac{3}{4}$
- $e(1) = 2 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \cdot 1\right) = \frac{1}{4}$
- $e(2) = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \cdot 2\right) = -\frac{9}{4} \leftarrow \text{Εισαγωγή}$

$$M = \left| \frac{9}{4} \right| = \frac{9}{4} > \rho_\sigma = \frac{3}{4}, \quad X_M = \{-1, 0, 2\}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow P_\mu(x) = x$$

- $e(-2) = -2 - (-2) = 0$, • $e(-1) = -2 - (-1) = -1$, • $e(0) = 1 - 0 = 1$
- $e(1) = 2 - (1) = 1$, • $e(2) = 1 - 2 = -1$, $M = 1 = \rho_\mu$

4α το X_n ενομοιοστέμενο σωστό σημείο
Επομένως, $P^*(x) = P_n(x) = x$

Άσκηση 2 (Βελτιστή ομοιομορφή Προσέγγισης σε Συνέχεια σωστό)

Να βρείτε τη β.ο.π της $f(x) = x^2 - x$ ορισμένης στο $[0, 2]$ στον P_1

Λύση

Έστω $P_1^*(x) = ax + b$

$$e(x) = f(x) - P_1^*(x) = x^2 - x - ax - b = x^2 - (1+a)x - b$$

$$e'(x) = 2x - (1+a) = 0 \Rightarrow x = \frac{1+a}{2}$$

Επομένως, θέλουμε το $\frac{1+a}{2} \in (0, 2)$ ώστε να έχουμε
τρία σημεία (τα άλλα δύο είναι το 0 και το 2)

Διατεταγμένα λοιπόν: $0, \frac{1+a}{2}, 2$ και θέλω να απο-
τελούν ενομοιοστέμενο σωστό σημείο. Έτσι:

$$\begin{aligned} e(0) = -e\left(\frac{1+a}{2}\right) = e(2) &\Leftrightarrow -b = -\left(\left(\frac{1+a}{2}\right)^2 - \frac{(1+a)^2}{2} - b\right) = 4 - 2(1+a) - b \\ \Leftrightarrow -b = \frac{(1+a)^2}{4} + b = 2 - 2a - b &\Leftrightarrow \begin{cases} -b = 2 - 2a - b \Leftrightarrow a = 1 \\ -b = \frac{(1+a)^2}{4} + b \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα, } P_1^*(x) = x - \frac{1}{2}$$

$$\text{Έτσι, το μέγιστο σφάλμα: } E(f) = \frac{1}{2}$$

Β' τρόπος (Με πολώνωμα chebyshev)

$$*) \text{ Μετασχηματισμός: } x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2} = t+1$$

(ώστε το $[0, 2]$ να γίνει $[-1, 1]$)

$$*) \text{ Αντιστροφή Μετασχηματισμού: } t = x-1$$

$$g(t) = f(x(t)) = x^2 - x = (t+1)^2 - (t+1) = t^2 + t$$

$$\text{Έτσι, } P_1^*(t) = g(t) - \frac{1}{2} T_2(t) = t^2 + t - \frac{1}{2}(2t^2 - 1) = t + \frac{1}{2}$$

(βλ. πολ. της g)

$$P_1^*(x) = P_1^*(t(x)) = t + \frac{1}{2} = x - 1 + \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2}$$

Άσκηση 3 (Βεβαι. ότι προέχουν και συνολο εναλλακ. σημείων)

Να βρεθεί η β.ο.η των $f \in X_S$, στον P_2 , όπου

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{με των αλγεβρικών εναλλακ. σημείων} \\ \text{με } X_S = \{0, 1, 2, 3\}$$

ΛΥΣΗ

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/8 \\ 7/8 \\ -1 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Άρα, } P_S(x) = \frac{7}{8} - x + \frac{1}{4}x^2$$

$$e(x) = f(x) - P_S(x)$$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΦΑΙΜΑΤΩΝ

$$\bullet e(0) = 0 - \left(\frac{7}{8} - 0 + \frac{1}{4} \cdot 0 \right) = -\frac{7}{8} \xrightarrow{\text{ακαταβλητό}} \leftarrow \text{ΕΞΟΔΟΣ}$$

$$\bullet e(1) = 1 - \left(\frac{7}{8} - 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 \right) = \frac{7}{8}$$

$$\bullet e(2) = -1 - \left(\frac{7}{8} - 2 + \frac{1}{4} \cdot 2^2 \right) = -\frac{7}{8}$$

$$\bullet e(3) = 1 - \left(\frac{7}{8} - 3 + \frac{1}{4} \cdot 3^2 \right) = \frac{7}{8}$$

$$\bullet e(4) = -1 - \left(\frac{7}{8} - 4 + \frac{1}{4} \cdot 4^2 \right) = -\frac{15}{8} \leftarrow \text{ΕΞΟΔΟΣ}$$

$$M = \left| -\frac{15}{8} \right| = \frac{15}{8} > \rho_S = \frac{7}{8}$$

$$\text{Άρα, } X_M = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow P_M(x) = 0$$

Αρα, $e(0)=0, e(1)=1, e(2)=-1, e(3)=1, e(4)=-1$

Άσκηση 4 (Προέγξηση Ελαχίστων Τετραγώνων)

Να βρεθεί μια προέγξηση ελαχίστων τετραγώνων στον P_2 των $f \in X_4$ με

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline f_i & 0 & -1 & 0 & 3 \end{array} \quad (\text{Διακρίσι Περίπτωση})$$

ΛΥΣΗ

$$q^*(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Με το σύστημα των κανονικών εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \alpha_{02} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{20} & \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \alpha_{ij} = (x^i, x^j) \\ b_{ij} = (f, x^i) \end{array}$$

Διακρίσι Περίπτωση

$$\alpha_{ij} = (x^i, x^j) = \sum_{k=0}^j x_k^{i+j} \quad \text{όπου } j=i$$

$$b_{ij} = (f, x^i) = \sum_{k=0}^4 x_k^i f_k$$

x_k^0	x_k	x_k^2	x_k^3	x_k^4	f_k	$x_k f_k$	$x_k^2 f_k$
1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	-1	-1	-1
1	2	4	8	16	0	0	0
1	3	9	27	81	3	9	27
4	6	14	36	98	2	8	26

Αρα, ο πίνακας Hankel είναι:

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 98 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 26 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Αρα, $q^*(x) = -2x + x^2$

2' τρόπος (Μεσω ορθογώνιων πολωνομίων)

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x - \frac{(x, P_0)}{(P_0, P_0)} P_0(x) = x - \frac{0+1+2+3}{1+1+1+1} \cdot 1 = x - \frac{3}{2}$$

$$\alpha_1 = \frac{(x, P_1)}{(P_1, P_1)} = \frac{0(-\frac{3}{2})^2 + 1(-\frac{1}{2})^2 + 2(\frac{1}{2})^2 + 3(\frac{3}{2})^2}{(-\frac{3}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{3}{2})^2} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{27}{4}}{\frac{9}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$\beta_1 = \frac{(P_1, P_1)}{(P_0, P_0)} = \frac{5}{4}$$

$$P_2(x) = (x - \alpha_1) P_1(x) - \beta_1 P_0(x) = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{5}{4} = x^2 - 3x + 1$$

$$\bullet (f, P_0) = 0 - 1 + 0 + 3 = 2$$

$$\bullet (f, P_1) = 0(-\frac{3}{2}) + (-1)(-\frac{1}{2}) + 0 \cdot \frac{1}{2} + 3(\frac{3}{2}) = 5$$

$$\bullet (f, P_2) = 0 \cdot 1 + (-1)(-1) + 0(-1) + 3 \cdot 1 = 4$$

$$\bullet (P_2, P_2) = 1^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 1^2 = 4$$

Ετσι

$$\lambda_0 = \frac{(f, P_0)}{(P_0, P_0)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \lambda_1 = \frac{(f, P_1)}{(P_1, P_1)} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\lambda_2 = \frac{(f, P_2)}{(P_2, P_2)} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\alpha_1 \alpha, \quad Q_2^*(x) = \lambda_0 P_0(x) + \lambda_1 P_1(x) + \lambda_2 P_2(x) = \frac{1}{2} + x - \frac{3}{2} + x^2 - 3x + 1 = x^2 - 2x$$

Άσκηση 5 (Splines)

Να βρεθεί η κυβική συνάρτηση Spline στο $[-2, 2]$ που προσεγγίζει των f :

x_i	-2	-1	1	2
f_i	-2	0	0	-2

και οι παράγωγοι

στα άκρα είναι $f'(-2) = 1$ και $f'(2) = -1$.

ΛΥΣΗ

Βρίσκω τις διαφορές των σημείων και των f .

$$\Delta x_0 = 1, \quad \Delta x_1 = 2, \quad \Delta x_2 = 1$$

$$\Delta f_0 = 2, \quad \Delta f_1 = 0, \quad \Delta f_2 = -2$$

Κατασκευάζουμε διάνυσμα των πινάκων:

$$\begin{bmatrix} 2(\Delta x_0 + \Delta x_1) & \Delta x_0 \\ \Delta x_2 & 2(\Delta x_1 + \Delta x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S'_1 \\ S'_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \left(\frac{\Delta x_1}{\Delta x_0} \Delta f_0 + \frac{\Delta x_0}{\Delta x_1} \Delta f_1 \right) - \Delta x_1 f'(-2) \\ 3 \left(\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \Delta f_1 + \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} \Delta f_2 \right) - \Delta x_1 f'(2) \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S'_1 \\ S'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12-2 \\ -12+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}}$$

$$\xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & \frac{35}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S'_1 \\ S'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -\frac{35}{3} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} S'_2 = -2 \\ S'_1 = 2 \end{matrix}$$

$$\text{for } S' = [2, -2]^T$$

Tonos Hermite:

$$1) x \in [-2, -1]:$$

$$S(x) = [(x+1)^2 + 2(x+2)(x+1)^2](-2) + (x+2)(x+1)^2 \cdot 1 + (x+1)(x+2)^2 \cdot 2 =$$

$$= \dots = -x^3 - 4x^2 - 3x.$$

$$2) x \in [-1, 1]:$$

$$S(x) = \frac{(x+1)(x-1)^2}{4} \cdot 2 + \frac{(x-1)(x+1)^2}{4} \cdot (-2) = -x^2 + 1$$

$$3) x \in [1, 2]:$$

$$S(x) = [(x-1)^2 - 2(x-2)(x-1)^2](-2) + (x-2)(x-1)^2 \cdot 1 + (x-1)(x-2)^2 \cdot (-2)$$

$$= \dots = x^3 - 4x^2 + 3x$$

(στοιός ηερίτρού) ορούς έρωτη τα ανιότρα ηρούνηα)

$$\text{Av } x \in [-2, -1] \text{ τότε } -x \in [1, 2] \rightarrow S(-x) = (-x)^3 - 4(-x)^2 + 3(-x) =$$

$$= -x^3 - 4x^2 - 3x = S(x) \text{ οπότε και στο } [1, 2] \text{ ορούς}$$